

III Cantor's Fehler in seiner Lehre des Transfiniten

April 2023 Die Existenz des Transfiniten wird durch Artikel II widerlegt. Unter hypothetischer Annahme der Existenz wird Cantor's Werk überprüft. Die antagonistische Disparität von transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen wird widerlegt, die Kontinuumhypothese erweist sich als falsch. Die vorgebliche Gleichheit von Punktmengen extrem unterschiedlicher geometrischer Objekte, wie z.B. einer kleinen Strecke und eines n-dimensionalen Raumes, wird widerlegt. Das Paradoxon äquivalenter transfiniter Mengen und Teilmengen, das Euklid's 5. Axiom „Das Ganze ist größer als der Teil“ scheinbar außer Kraft setzt, wird aufgelöst. Euklid's Axiom bleibt gültig.

1. Einleitung
2. Die Bijektion, die $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ rechtfertigen soll, wird widerlegt
3. Die Kontinuumhypothese ist falsch
4. Die Gleichheit von Punktmengen verschiedener geometrischer Objekte wird widerlegt
5. Cantor's Fehlinterpretation der Bijektion transfiniter Mengen und Teilmengen

1. Einleitung

Die vom Axiomensystem ZFC geforderte transfinite Ordinalzahl ω der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sowie Cantor's Begründung dieser Terme wurde in Artikel II widerlegt.¹ Damit erübrigt sich eigentlich die Diskussion von Sätzen, die auf diesen Termen basieren. Im Sinne eines Überblicks über Cantor's Lehre werden dennoch die wichtigsten Aussagen betrachtet.

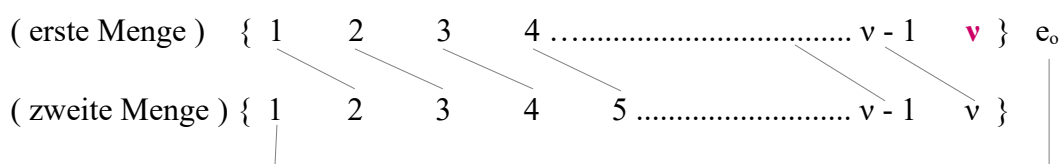
Die Diskussion erfordert die Unterscheidung zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen. Die Ordinalzahl definiert die Rangordnung der Elemente einer geordneten Menge, z. die Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ mit dem größten Element n besitzt die Ordinalzahl n . Die Kardinalzahl beschreibt die Anzahl der Elemente auch ungeordneter Mengen. Im Endlichen fallen Kardinal- und Ordnungszahl immer zusammen. Dies gilt auch für die kleinsten transfiniten Zahlen, die Ordinalzahl ω der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und ihre Kardinalzahl $\aleph_0$ (Aleph 0). Für größere **transfinite Ordinal- und Kardinalzahlen** gilt die Gleichheit nicht mehr, sie **weisen einen antagonistischen Unterschied auf**. Bei einem einzelnen weiteren transfiniten Element gilt:

(1) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ aber $\omega \neq \omega + 1$

Diesen Zahlen folgen weitere gleiche Kardinal-, aber ungleiche Ordinalzahlen. Diese Disparität muss man sich in allen Konsequenzen klar machen. Ein weiteres Element entspricht einer größeren Ordinalzahl, aber von der Kardinalzahl wird gefordert, daß sie gleich bleibe. **Cantor verifiziert gleiche Kardinalzahlen zweier Mengen durch eine Bijektion**, die gegenseitig eindeutige Beziehung der Elemente, die $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ rechtfertigen soll.

2. Die Bijektion, die $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ rechtfertigen soll, wird widerlegt

Cantor begründet (1) für die Menge der natürlichen Zahlen, $\{v\}$, dadurch, „daß wenn zu der Menge $\{v\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt [wird], die Vereinigungsmenge $\{\{v\}, e_0\}$ der ursprünglichen $\{v\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen den beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Element e_0 der ersten Menge das Element 1 der zweiten, dem Element v der ersten das Element $v + 1$ der anderen entspricht. ... [daher] haben wir $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$.“ Die graphische Darstellung ist auf endliche Mengen beschränkt:



Die letzte Zahl der ersten Menge, **v, bleibt ohne Zuordnung zu einem Element der zweiten**

Menge übrig. Wir können die beiden Zahlenfolgen und die Zuordnung, wie Cantor es voraussetzt, unendlich erweitern, es bleibt immer ein nicht zugeordnetes Element der ersten Menge übrig. **Eine Bijektion liegt nie vor.**

Daß eine Bijektion endgültig ausgeschlossen werden kann, wird für potentiell unendliche Elemente demonstriert.

Die Kardinalzahl ist unabhängig von der Art der Zuordnung der Elemente. Nachfolgend werden identische Zahlen sowie e_0 des ersten und der 1 des zweiten Satzes aufeinander abgebildet.

(erste Menge)	{	{	1	2	3	4	5		v-1	v		}	e_0	}
(zweite Menge)	{	1	2	3	4	5		v-1	v		}			

Die erste Zahl der ersten Menge, 1, bleibt ohne Zuordnung übrig. Die Äquivalenz der beiden Mengen wird widerlegt.

(2) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ lässt sich nicht begründen, es gilt $\aleph_0 \neq \aleph_0 + 1$ wie auch $\omega \neq \omega + 1$.

3. Die Kontinuumhypothese ist falsch

Wir folgen weiter Cantor's Argumentation. Demnach gilt nicht nur $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$, sondern die Gleichheit vieler weiterer Kardinalzahlen wird abgeleitet. Durch Addition von 1 auf beiden Seiten erhält man:

(3) $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$ und damit $\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$

Die Folge gleicher Kardinalzahlen setzt sich immer weiter fort bis zu $\aleph^n$.

(4) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = n \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n$

Auch die rationalen Zahlen¹, die neben vielen Brüchen vergleichsweise wenige natürliche Zahlen enthalten, sind trotzdem durch natürliche Zahlen abzählbar, wie Cantor durch sein 1.

Diagonalargument zeigt. **Die rationalen Zahlen besitzen ebenfalls die Kardinalzahl $\aleph_0$. Aber für die Kardinalzahl der Menge der reellen Zahlen², nach Cantor $2^{\aleph_0}$, zeigt er durch sein 2. Diagonalargument :**

(5) $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

Die Vermutung, daß zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ keine weiteren Kardinalzahlen liegen, wird als 'Cantors Kontinuumhypothese' bezeichnet. Sie wurde 1878 aufgestellt. Hilbert hat sie beim Internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahr 1900 zum wichtigsten ungelösten Problem der Mathematik erklärt. Sie beschäftigte die Wissenschaftler viele Jahrzehnte. Kurt Gödel demonstrierte 1938, daß sie aus dem Axiomensystem ZFC nicht widerlegt werden kann, Paul Cohen zeigte, daß sie daraus nicht zu beweisen ist und wurde dafür 1966 mit der Fields Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumhypothese ist aus den Axiomen unentscheidbar.

Die Formel (6), nach der Cantor die reellen Zahlen x errechnet, zeigt, daß $2^{\aleph_0}$ nicht die Kardinalzahl der reellen Zahlen, sondern die der rationalen Zahlen ist:

(6) $x = f(v)/2 + f(v)/2^2 + f(v)/2^n + \quad (f(v) = 0 \text{ oder } 1)$

Die Zahlenmenge $\{x\}$ lässt sich durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls $[0, 1]$ und der daraus resultierenden Hälften erklären. Die Kardinalzahl von $\{x\}$ ist also $2^{\aleph_0}$.¹ Die Zahlen x, die durch (6) generiert werden, enthalten aber nur natürliche Zahlen im Zähler und nur Zweierpotenzen im Nenner, bilden also immer ganzzahlige Brüche. Formel (6) zur Berechnung aller reellen Zahlen erzeugt also nur rationale Zahlen. Deren Kardinalzahl ist gemäß Cantors 1. Diagonalargument aber gleich $\aleph_0$

(7) $2^{\aleph_0} = \aleph_0$

¹ Die rationalen Zahlen bestehen aus Brüchen ganzer Zahlen.

² Die reellen Zahlen bestehen aus den rationalen sowie den irrationalen Zahlen (Grenzwerte unendlicher konvergierender Folgen rationaler Zahlen).

Es liegt ein Widerspruch zu (5) vor. Im Buch "Nichts" wird gezeigt, dass auch das 2. Diagonalargument nur auf rationalen Zahlen beruht, d. h. (5) damit nicht begründet werden kann. **Die Grundlage (5) der Kontinuumshypothese ist falsch, (7) ist gültig.**

4. Die Gleichheit der Punktmengen verschiedener geometrischer Objekte wird widerlegt

Cantor errechnet neben (4) mittels der Potenzregeln **weitere gleiche Kardinalzahlen**, wobei $2^{\aleph_0} \equiv \aleph_1$ gesetzt wird:

$$(8) \aleph_1 = \aleph_1^2 = \aleph_1^3 = \dots = \aleph_1^n = \aleph_1^{\aleph_0}^3$$

Cantor hat aus der Gleichheit dieser Zahlen einen Schluß gezogen, den er selbst als 'unglaublich' charakterisierte. „Je le vois, mais je ne le croi pas“, „Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben“.

Er setzt dafür voraus, daß die Kardinalzahlen auf Punkte abgebildet werden können. $\aleph_1$ ist dann die Punktmenge auf der Strecke $[0, 1]$, $\aleph_1^2$ definiert die Punktmenge des entsprechenden Quadrats, $\aleph_1^n$ die Menge in einem n-dimensionalen und $\aleph_1^{\aleph_0}$ die in einem $\aleph_0$ -dimensionalen Gebilde. **All diese Punktmengen gemäß (8) sind gleich.**

Aber Cantor widerspricht sich damit selbst. Er fordert nämlich bereits bei seiner Begründung von $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$, daß trotz gleicher Kardinalzahl ein weiteres Element bzw. ein weiterer Punkt vorliegt. Auch zusätzliche Punkte lassen die Kardinalzahl gleich, es werden aber größere Ordinalzahlen gebildet. Das zeigt Cantors Folge von Ordinalzahlen, die trotz gleicher Kardinalzahlen immer größer wird:

$$(10) 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, 3\omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

Die Ordinalzahl bestimmt die Punktmengen, nicht, wie Cantor voraussetzt, die Kardinalzahl. Die Gleichheit der Punktmengen verschiedener geometrischer Objekte gibt es nicht.

5. Cantor's Fehlinterpretation der Bijektion transfiniter Mengen und Teilmengen

Die Äquivalenz von Mengen und Teilmengen ist für Cantor die charakteristischste Eigenschaft des Transfiniten, im Widerspruch zu Euklid's 5. Axiom, „Das Ganze ist größer als der Teil“.

Die Kardinalzahl äquivalenter Mengen und Teilmengen ist gleich groß. Als Beispiel werden die natürlichen Zahlen, Quadratzahlen und geraden Zahlen aufgeführt :

1	2	3	4	5	6	n
1 ²	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	n ²
2	4	6	8	10	12.....	2n

Die Äquivalenz von natürlichen Zahlen und Quadratzahlen im Unendlichen hatte bereits Galilei beunruhigt und ging als „Galileis Paradoxon“ in die Geschichte der Mathematik ein.

Tatsächlich trifft die Äquivalenz bereits für endliche Mengen zu.

Unterschiedliche Dichte der Elemente verschiedener Folgen sind für das scheinbare Paradoxon verantwortlich, wie es für endliche Folgen natürlicher und gerader Zahlen gezeigt wird.

(a)	1	2	3	4	5	6	n
(b)		2		4		6	n
(c)	2	4	6	8	10	12	2n

Die scheinbar paradoxe Äquivalenz von (a) und (c) resultiert aus unterschiedlichen Dichten der geraden Zahlen. Die der Sequenzen (a) und (b) besitzen jedoch die gleiche Dichte. Die

3 Die nächst größere Kardinalzahl ist erst durch $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$ gegeben, eine weitere durch $\aleph_3 = 2^{\aleph_2}$ usw.

(9) 1, 2, 3, 4, 5,n, $\aleph_0$ $2^{\aleph_0}$ $2^{\aleph_1}$ $2^{\aleph_2}$ $2^{\aleph_3}$

Cantor fordert für die Kardinalzahlen fortgesetzte Stufen der Unendlichkeit.

Kardinalzahl der geraden Zahlen (b) ist nur halb so groß wie die der natürlichen Zahlen (a), die Kardinalzahlen von (a) und (c) sind jedoch gleich, ohne paradoxe Eigenschaften zu unterstellen. .
Alle anderen Äquivalenzen werden analog erklärt.

Euklid's „Das Ganze ist größer als der Teil“ bleibt gültig.